数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 81-88



# SEMI-LOCAL UNITS MODULO CYCLOTOMIC UNITS

東京大学大学院数理科学研究科 都地 崇恵 (TAKAE TSUJI)

## 1. 序

$p$ を奇素数とし, 以下固定しておく. $K$ を第一種, すなわちその導手が $p^2$ で割り切れないアーベル体とし, $K_\infty/K$ を円分 $\mathbb{Z}_p$拡大とする. $K_\infty$ の semi-local units を $\mathcal{U}$ とし, Sinnott の円単数で生成されるその閉部分群を $\mathcal{C}$ とする (定義は §2 を参照). $\Delta := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおく. このとき $\mathcal{U}, \mathcal{C}$ などは $\mathbb{Z}_p[\Delta][[\Gamma]]$-加群をなす.

考察したい対象は $\mathbb{Z}_p[\Delta][[\Gamma]]$-加群 "$\mathcal{U}/\mathcal{C}$" であるが, それをさらに $\Delta$ の作用ごとに分解して考える. $\chi$ を $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に値をとる $\Delta$ の指標とし, $\mathbb{Z}_p[\chi]$ を $\mathbb{Z}_p$ 上 $\chi$ の像で生成される環とする. $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-加群 $M$ に対して $\chi$-quotient と呼ばれる $\mathbb{Z}_p[\chi]$-加群 $M_\chi$ が定められる (定義は §2 を参照).

そこで $\chi$ を非自明で even な $\Delta$ の指標とし, $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma]]$-加群 $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ を考える. その構造に関する研究は岩澤 [Iw] に始まり, [Gi], [C], [Gr] 等によって拡張されている. それらは $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma]]$-構造を $p$ 進 $L$ 関数を用いて記述するというものであり, $p \nmid [K:\mathbb{Q}] = |\Delta|$ なる仮定の下ではその構造は完全に決定されている ([Iw], [Gi]). しかし $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ を仮定しないときは $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$ の構造は決定されているが ([Gr]), $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma]]$-構造は完全には決められていない (§3 を参照).

そこで, 今回すべての第一種アーベル体 $K$ と非自明で even な $\chi$ について定義される $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma]]$-加群 $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の構造を完全に決定した (定理 4.2).

$\mathbb{Z}_p[\Delta]$-加群 $M$ に対して $\chi$-part と呼ばれる $\mathbb{Z}_p[\chi]$-加群 $M^\chi$ が定義され (定義は §2 を参照), $\mathbb{Z}_p[\chi][[\Gamma]]$-加群 $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ の構造についても同様に決定した (定理 4.1). $\chi$-part および $\chi$-quotient の定義は後で詳しく述べるが, $p \nmid |\Delta|$ の下では両者は一致する. しかし, 一般には一致しないことに注意しておく. 尚, 講演では $\chi$-quotient $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ に関する結果を詳しく話すことが出来なかったのでここに報告させて頂く.

この小論の構成は次のようになっている. まず §2 で記号の定義などを行い, §3 で $\mathcal{U}/\mathcal{C}$ の構造に関して知られている結果を復習する. §4 で主結果を述べ, 最後に証明の概略を述べる.

## 2. 記号等の準備

まず $\chi$-part と $\chi$-quotient を定義し, その基本的な性質を述べる ([So] 参照).

一般に $G$ を有限アーベル群とし, $\chi$ を $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に値をとる $G$ の指標とする. $\mathbb{Z}_p$ 上 $\chi$ の像で生成される環を $\mathbb{Z}_p[\chi]$ とおく. $\chi$ を通してそれを $\mathbb{Z}_p[G]$-加群と見なしたものを$\underline{\mathbb{Z}_p[\chi]}$で表わす. $\mathbb{Z}_p[G]$-加

群 $M$ に対して $\mathbb{Z}_p[\chi]$-加群 $M^\chi$ , $M_\chi$ を次のように定義する:

$$M^\chi := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\underline{\mathbb{Z}_p[\chi]}, M),$$

$$M_\chi := M \otimes_{\mathbb{Z}_p[G]} \underline{\mathbb{Z}_p[\chi]}.$$

$M^\chi$ (resp. $M_\chi$) を $M$ の $\chi$-part (resp. $\chi$-quotient) と呼ぶことにする. $\chi$-part と $\chi$-quotient は $\chi$ の $\mathbb{Q}_p$共役類のみに依存する, つまり $\chi'$ が $\chi$ の $\mathbb{Q}_p$共役な指標であるとき $M^{\chi'} \simeq M^\chi$ と $M_{\chi'} \simeq M_\chi$ が成り立つ. $I_\chi$ を $\chi(g) - g$, $g \in G$ たちで生成される $\mathbb{Z}_p[\chi][G]$ のイデアルとする.

このとき, 次の事柄は簡単に確かめられる.

**補題 2.1** ([So, Lemma II.1]). $\mathbb{Z}_p[\chi]$-加群として, 次の同型が成り立つ:

$$M^\chi \simeq \{m \in M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi] \mid g \cdot m = \chi(g)m, \forall g \in G\},$$

$$M_\chi \simeq M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi]/I_\chi(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi]).$$

つまり, $M^\chi$ (resp. $M_\chi$) は $g \in G$ の作用が$\chi(g)$ となる $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi]$ の最大の部分加群 (resp. 商加群) と同型である.

$\Phi$ を $\chi$ の $\mathbb{Q}_p$共役たちの和とし

$$e_\chi := \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \Phi(g)^{-1} g$$

を $\Phi$ に対応する $\mathbb{Q}_p[G]$ の idempotent とする. このとき $\chi$ により $\mathbb{Z}_p[G]$-同型 $e_\chi \mathbb{Z}_p[G] \simeq \underline{\mathbb{Z}_p[\chi]}$ が得られる. 従って $p \nmid |G|$ ならば, $\underline{\mathbb{Z}_p[\chi]}$ は $\mathbb{Z}_p[G]$ の直和因子であり, $M^\chi$ と $M_\chi$ はどちらも $e_\chi M$ と同型である. また, このとき $M = \oplus e_\chi M$ と分解できる. ここに $\chi$ は $G$ の指標の $\mathbb{Q}_p$共役類全体をわたる.

関手 $M \mapsto M^\chi$ (resp. $M \mapsto M_\chi$) は左完全 (resp. 右完全) であり, $p \nmid |G|$ であればどちらも完全関手である. 自然に定まる写像 $M^\chi \to M_\chi$ の kernel と cokernel は $|G|$ 倍で零化される. 従って, とくに $M^\chi \otimes \mathbb{Q}_p \simeq M_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$ が成り立つ.

次に $\mathcal{U}$ , $\mathcal{C}$ などの定義を述べる.

$n \geq 0$ に対して 1 の $p^n$ 乗根全体からなる群を $\mu_{p^n}$ で表わし, $\mu_{p^\infty} := \cup_{n \geq 0} \mu_{p^n}$ とおく.

$K$ を第一種アーベル体とし, $K_\infty/K$ をその円分 $\mathbb{Z}_p$拡大とし, $K_n$ を $[K_n : K] = p^n$ となるような中間体とする.

$\mathfrak{p}$ を $p$ 上にある $K$ の素イデアルとし, $\mathfrak{p}_n$ を $\mathfrak{p}$ 上にある $K_n$ の唯 1 つの素イデアルとする. $K_n$ の $\mathfrak{p}_n$ による完備化を $K_{n,\mathfrak{p}}$ とし, $U_{n,\mathfrak{p}}$ を $K_{n,\mathfrak{p}}$ の主単数群とする.

$$\mathcal{U}_n := \prod_{\mathfrak{p}|p} U_{n,\mathfrak{p}}$$

とおき, これを $K_n$ の $p$ に関する "semi-local units" と呼ぶ.

次に Sinnott の円単数で生成される $\mathcal{U}_n$ の閉部分群 $\overline{\mathcal{C}}_n$ を考える. Sinnott の円単数群の定義は次の通りである ([Si, §4] 参照): $k$ を アーベル体とし, $E_k$ をその全単数群とする. $m \geq 1$ に対して

1 の原始 $m$ 乗根を $\zeta_m$ で表わす. このとき, $k$ の円単数群 $C_k$ は

$$C_k := E_k \cap \langle \pm 1, N_{\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}(\zeta_m)\cap k}(1-\zeta_m^a) \mid m, a \in \mathbb{Z}, m > 1, (a,m) = 1\rangle$$

で定義される. $C_k$ は $E_k$ の中で指数有限になることが知られている ([Si]).

そこで $C_{K_n}$ を $K_n$ の円単数群とし, 埋め込み $K_n{}^\times \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} K_{n,\mathfrak{p}}{}^\times$ の像と同一視する. $C_{K_n} \cap \mathcal{U}_n$ の $\mathcal{U}_n$ の中での閉包を $\overline{\mathcal{C}}_n$ で表わす.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_K := \varprojlim \mathcal{U}_n\ ,\ \ \mathcal{C} = \mathcal{C}_K := \varprojlim \overline{\mathcal{C}}_n$$

とおく. ただし射影極限はノルムでとる.

$\Delta := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $\Gamma := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおく. $\Gamma$ の位相的生成元 $\gamma_0$ を 1 つ固定する. $\gamma_0$ に $1+T$ を対応させる写像により $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ となる. $\mathcal{U}, \mathcal{C}$ などは $\Delta \times \Gamma$ が作用する $\mathbb{Z}_p$-加群であるから $\mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$-加群となる.

そこで even かつ 非自明な $\Delta$ の指標 $\chi$ を 1 つ固定する. このとき $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$, $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ などは $\mathbb{Z}_p[\chi][[T]] =: \Lambda_\chi$ 上の加群になる. それらの $\Lambda_\chi$-加群としての構造を考察する.

$\chi$ を Dirichlet 指標と同一視し, $L_p(s,\chi)$ を $\chi$ に付随する Kubota-Leopoldt の $p$ 進 $L$ 関数とする. $L_p(s,\chi)$ は巾級数で表されることが知られている ([W, Th. 7.10] 参照). すなわち, 次を満たす $g_\chi(T) \in \Lambda_\chi$ が唯 1 つ存在する:

$$g_\chi(\kappa(\gamma_0)^s - 1) = L_p(1-s,\chi)\ ,\ \ s \in \mathbb{Z}_p.$$

ただし $\kappa : \Gamma \to 1 + p\mathbb{Z}_p$ は円分指標である.

$\omega$ を Teichmüller 指標とし, $\chi\omega^{-1}$ に対応する Dirichlet 指標を $\chi_1$ とかくことにする. $\dot{T} := (1+T)^{-1}\kappa(\gamma_0) - 1 \in \Lambda_\chi$ とおく. このとき $\Gamma$-加群として $\mathbb{Z}_p[[T]]/(\dot{T}) \simeq \mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim \mu_{p^n}$ となることに注意しておく.

## 3. 知られている結果

この節では $\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ および $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の構造について知られている結果をより詳しく見ることにする. まず $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ を仮定したとき, §2 でみたように上の 2 つの加群はどちらも $e_\chi(\mathcal{U}/\mathcal{C})$ に同型である. 次が知られている.

**定理 3.1** (Iwasawa [Iw], Gillard [Gi]). $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ と仮定する. このとき, $\Lambda_\chi$-加群 $e_\chi(\mathcal{U}/\mathcal{C})$ について, 次が成り立つ:
$\chi_1(p) \neq 1$ のとき

$$e_\chi(\mathcal{U}/\mathcal{C}) \simeq \Lambda_\chi/(g_\chi(T)).$$

$\chi_1(p) = 1$ のとき, 次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/(\dot{T}) \longrightarrow e_\chi(\mathcal{U}/\mathcal{C}) \longrightarrow \Lambda_\chi/(g_\chi(T)/\dot{T}) \longrightarrow 0.$$

$p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ を仮定しないとき, 次の結果が知られている.

**定理 3.2** (Greither [Gr]). $\Lambda_\chi \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$-加群として $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{Q}_p(\chi)[[T]]/(g_\chi(T))$ の特性イデアルは一致し，とくに，$\chi_1(p) \neq 1$ ならば $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq \mathbb{Q}_p(\chi)[[T]]/(g_\chi(T))$ が成り立つ．

上の定理は$\Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$-加群としての構造を考察しているものであるが，その結果から $\Lambda_\chi$-加群としての構造がどの程度，再現できるかについて見ることにする．一般に $X$ , $Y$ を $\Lambda_\chi$-torsion な有限生成 $\Lambda_\chi$-加群で，それらの $\mu$不変量が 0，つまり $\mathbb{Z}_p[\chi]$-加群として有限生成であるとする．このとき $\Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$-加群として $X \otimes \mathbb{Q}_p \simeq Y \otimes \mathbb{Q}_p$ が成り立つならば，$\Lambda$-加群の構造定理 ([W, Th. 13.12] 参照) により $X$ は $Y$ に $\Lambda_\chi$-擬同型であることがわかる．ここに $X$ が $Y$ に $\Lambda_\chi$-擬同型であるとは kernel と cokernel が位数有限となる $\Lambda_\chi$-準同型：$X \to Y$ が存在することをいい，$X \sim Y$ で表わすことにする．

いま $g_\chi(T)$ の $\mu$不変量が 0 になることは Ferrero-Washington [F-W] によって証明されており，またその事実から $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の $\mu$不変量が 0 になることも示せる．よって，$\chi_1(p) \neq 1$ のとき，定理 3.2 から

$$(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \sim \Lambda_\chi/(g_\chi(T))$$

が成り立つことがわかる．$\chi(p) = 1$ のときも同様にして Greither の結果から $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi/(\Lambda_\chi/(\dot{T})) \sim \Lambda_\chi/(g_\chi(T)/\dot{T})$ を導くことができる．

従って，$p|[K:\mathbb{Q}]$ であっても，有限の差を無視した上では $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の $\Lambda_\chi$-構造は知られていることになる．しかし，有限部分まで含めたその構造については，今までに知られている結果からでは知り得ない．また，§2 でみたように $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \otimes \mathbb{Q}_p \simeq (\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi) \otimes \mathbb{Q}_p$ が成り立つので，$\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ についても有限の差を無視した構造はわかるが，それ以上はわからない．

## 4. 主結果

前節でみたように $p|[K:\mathbb{Q}]$ となる $K$ に対して定められる$\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ および $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ の構造は完全には決定されていなかった．我々の主結果はすべての第一種アーベル体 $K$ と 非自明かつ even な $\chi$ に対して定義されるそれらの構造を完全に決定することにある．

まず初めに $\chi$-part $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ について得た結果は次の通りである:

**定理 4.1.** $\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ について，次が成り立つ：

(i) $\chi_1(p) \notin \mu_{p^\infty}$ のとき

$$\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi \simeq \Lambda_\chi/(g_\chi(T)).$$

(ii) $\chi_1(p) \in \mu_{p^\infty}, \chi_1(p) \neq 1$ のとき，次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi \longrightarrow \Lambda_\chi/(g_\chi(T)) \longrightarrow \Lambda_\chi/(\chi_1(p)-1, \dot{T}) \longrightarrow 0.$$

(iii) $\chi_1(p) = 1$ のとき，次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/(\dot{T}) \longrightarrow \mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi \longrightarrow \Lambda_\chi/(g_\chi(T)/\dot{T}) \longrightarrow 0.$$

注 *1.* $\Lambda_\chi$-加群として$\Lambda_\chi/(\chi_1(p)-1,\dot{T}) \simeq (\mathbb{Z}_p[\chi]/(\chi_1(p)-1)) \otimes \mathbb{Z}_p(1)$ であることをみれば, $\chi$ が (ii) の状況のとき$\Lambda_\chi/(\chi_1(p)-1,\dot{T})$ は非自明な位数有限の $\Lambda_\chi$-加群であることが判る. 従って, この場合は$\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ と $\Lambda_\chi/(g_\chi(T))$ は同型にならず, 必ず有限の差がある.

注 *2.* $\chi$ が (ii) の状況であれば $\chi$ の位数は必ず $p$ で割れるので, $p|[K:\mathbb{Q}]$ でなくてはならない. 従って, $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ を仮定すれば (ii) の 状況にはなり得ず, §2 でみたように $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi \simeq e_\chi(\mathcal{U}/\mathcal{C})$ となるので上の定理は $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ の下では 定理 3.1 に一致する. また $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \otimes \mathbb{Q}_p \simeq (\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi) \otimes \mathbb{Q}_p$ であるから, 上の定理の各加群に $\otimes \mathbb{Q}_p$ を施せば, 定理 3.2 が得られる.

次に $\chi$-quotient に関する結果を述べるために必要な記号を導入する. $m$ (resp. $f$) を $K$ (resp. $\chi$) の導手の $p$ と素な部分とする. このとき $f|m$ となっている. そこで $f$ を割らない $m$ の素因子全体から成る集合を $\mathfrak{L}$ とおく:

$$\mathfrak{L} := \{\, l : \text{素数} \mid l|m\ ,\ l \nmid f \}.$$

$\mathfrak{L}$ の部分集合 $I$ に対して $m_I := f\prod_{l\in I} l$ とおき, $d_I := [\mathbb{Q}(\zeta_{m_\mathfrak{L}})\cap K : \mathbb{Q}(\zeta_{m_I})\cap K]$ とする. $K$ と $\chi$ によって決まる $\Lambda_\chi$ のイデアルを

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{K,\chi} := \langle d_I \prod_{l\in I}(1-\chi(l)(1+T)^{a_l}) | I \subseteq \mathfrak{L} \rangle$$

と定める. ただし $a_l$ は $l = \omega(l)\kappa(\gamma_0)^{a_l} \in \mathbb{Z}_p^\times$ を満たす $\mathbb{Z}_p$ の元とする. 最後に $d$ を $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の中の $p$ の分解群の位数とする.

このとき, 次を示した:

**定理 4.2.** $\Lambda_\chi$-加群 $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi$ について, 次が成り立つ:

(i) $\chi_1(p) \notin \mu_{p^\infty}$ のとき

$$(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \simeq \Lambda_\chi/g_\chi(T)\mathfrak{A}.$$

(ii) $\chi_1(p) \in \mu_{p^\infty}, \chi_1(p) \neq 1$ のとき, 次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \longrightarrow \Lambda_\chi/g_\chi(T)\mathfrak{A} \longrightarrow \Lambda_\chi/(\chi_1(p)-1,\dot{T}) \longrightarrow 0.$$

(iii) $\chi_1(p) = 1$ のとき, 次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/(\dot{T}) \longrightarrow (\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \longrightarrow (\Lambda_\chi \oplus \Lambda_\chi/(d,\dot{T}))/(g_\chi(T)/\dot{T}, B_{1,\chi_1})\mathfrak{A} \longrightarrow 0.$$

ここに $B_{1,\chi_1} = (1/f)\sum_{a=1}^{f} \chi_1(a)a (\in \mathbb{Z}_p[\chi])$ は generalized Bernoulli 数である.

注 *3.* $\mathfrak{A}$ は常に $\Lambda_\chi$ の中で指数有限になることが確かめられる. とくに $K$ が $\ker\chi$ の固定体であるとき, $\mathfrak{A}_{K,\chi} = \Lambda_\chi$ である. さらに, このとき$\chi_1(p) = 1$ ならば$\Lambda_\chi/(d,\dot{T}) = \{0\}$ となる.

また $\Lambda_\chi$-加群 $\Lambda_\chi/g_\chi(T)\mathfrak{A}$ は次の完全系列を満たす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/\mathfrak{A} \longrightarrow \Lambda_\chi/g_\chi(T)\mathfrak{A} \longrightarrow \Lambda_\chi/(g_\chi(T)) \longrightarrow 0.$$

注 3 より, 上の定理からとくに次が導かれる:
(i) (ii) のとき

$$(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \sim \Lambda_\chi/(g_\chi(T)).$$

(iii) のとき

$$(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi/(\Lambda_\chi/(\dot{T})) \sim \Lambda_\chi/(g_\chi(T)/\dot{T}).$$

$L$ をアーベル体で $L \supset K$ なるものとする. $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の指標 $\chi$ を $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の指標とも見なす. 定理 4.1 より明らかに $\mathcal{U}_K^\chi/\mathcal{C}_K^\chi \simeq \mathcal{U}_L^\chi/\mathcal{C}_L^\chi$ が成り立つ. しかし, 上の定理から $(\mathcal{U}_K/\mathcal{C}_K)_\chi$ と $(\mathcal{U}_L/\mathcal{C}_L)_\chi$ は必ずしも同型でないことが判る. さらにその差は $\mathfrak{A}$ などを用いてかける. 例えば (i) (ii) のとき, 次は完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}_{K,\chi}/\mathfrak{A}_{L,\chi} \longrightarrow (\mathcal{U}_L/\mathcal{C}_L)_\chi \longrightarrow (\mathcal{U}_K/\mathcal{C}_K)_\chi \longrightarrow 0.$$

注 *4.* $\mathfrak{A}$ に現れる元 $1-\chi(l)(1+T)^{a_l}$ に $T=\kappa(\gamma_0)^k-1$ $(k \geq 1)$ を代入すれば $1-\chi\omega^{-k}(l)l^k$ となる. これは Dirichlet の $L$ 関数 $L(s,\chi\omega^{-k})$ の $l$ における Euler 因子である.

注 *5.* $p \nmid [K:\mathbb{Q}]$ を仮定する. 注 2 で見たように (ii) の状況にはならず, また $\mathfrak{A}_{K,\chi}=\Lambda_\chi$ であることが判る. 従って, このとき上の定理は定理 3.1 に一致する. 一般に $\mathfrak{A}$ は $\Lambda_\chi$ の中で指数有限であることから, 上の定理の各加群に$\otimes\mathbb{Q}_p$ を施せば 定理 3.2 が得られることは明らかである.

## 5. 証明の概略

証明は [C], [Gr] と同様な方針で行った. [Gr] では $\Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$-加群としての構造を考察していたが, ここでは $\Lambda_\chi$-加群としてのそれを考えるため, より細かい議論が必要になった.

$\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の指標 $\chi$ を $\mathrm{Gal}(K(\mu_p)/\mathbb{Q})$ の指標とも見なしたとき, $(\mathcal{U}_{K(\mu_p)})^\chi = \mathcal{U}_K^\chi$, $(\mathcal{C}_{K(\mu_p)})^\chi = \mathcal{C}_K^\chi$, $\mathcal{U}_{K(\mu_p),\chi} = \mathcal{U}_{K,\chi}$, $\mathcal{C}_{K(\mu_p),\chi} = \mathcal{C}_{K,\chi}$ などが成り立つことは簡単に確かめられる. よって $K$ は第一種であるから, $F$ を $p$ が不分岐となるアーベル体とし, $K := F(\mu_p)$ として考察すれば十分である. また, このとき $K_n = F(\mu_{p^{n+1}})$ であり, $K_\infty = F(\mu_{p^\infty})$ となる.

$\Delta' := \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ とし $G_\infty := \mathrm{Gal}(K_\infty/F)$ とおく: $\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta' \times G_\infty \simeq \Delta \times \Gamma$. $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ を $F_\mathfrak{p}$ の整数環とし, $\widehat{\mathcal{O}}_F := \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ とおく. $D$ を $\Delta'$ の中の $p$ の分解群とする: $D \simeq \mathrm{Gal}(F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p)$. Coleman によって, 次の canonical な完全系列の存在が証明されている:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta'/D](1) \longrightarrow \mathcal{U} \xrightarrow{\mathrm{Col}} \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta'/D](1) \longrightarrow 0. \qquad (\diamondsuit)$$

ここで最も重要な写像 “Col” について, 詳しく述べる余裕はないが Coleman power series を使って定義されるものである ([C, Th. 4] [Gr, Prop. 2.10] 参照).

$F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p$ は不分岐拡大であることから $\mathbb{Z}_p[\Delta']$-加群として$\widehat{\mathcal{O}}_F \simeq \mathbb{Z}_p[\Delta']$ が成り立つ. ゆえに, $\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]] \simeq \mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$ となる. さらに canonical な同型

$$(\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]])^\chi \xrightarrow{\sim} \Lambda_\chi\ , \quad (\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]])_\chi \xrightarrow{\sim} \Lambda_\chi$$

を定めることができた. よって 完全系列 $(\diamondsuit)$ の$\chi$-part および $\chi$-quotient をとることにより canonical な準同型 $\mathrm{Col}^\chi : \mathcal{U}^\chi \to \Lambda_\chi$ と $\mathrm{Col}_\chi : \mathcal{U}_\chi \to \Lambda_\chi$ が定まる.

そこで, 次を示した:

**命題 5.1.** ( a ) $\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}^\chi$ について次が成り立つ:

(i) $\chi_1(p) \notin \mu_{p^\infty}$ のとき, $\mathrm{Col}^\chi : \mathcal{U}^\chi \xrightarrow{\sim} \Lambda_\chi$.

(ii) $\chi_1(p) \in \mu_{p^\infty}$ , $\chi_1(p) \neq 1$ のとき, $\mathrm{Col}^\chi : \mathcal{U}^\chi \xrightarrow{\sim} (\chi_1(p)-1, \dot{T}) \subset \Lambda_\chi$.

(iii) $\chi_1(p) = 1$ のとき, 次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/(\dot{T}) \longrightarrow \mathcal{U}_\chi \xrightarrow{\mathrm{Col}^\chi} \dot{T}\Lambda_\chi \longrightarrow 0.$$

( b ) $\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{U}_\chi$ について次が成り立つ:

(i) $\chi_1(p) \notin \mu_{p^\infty}$ のとき, $\mathrm{Col}_\chi : \mathcal{U}_\chi \xrightarrow{\sim} \Lambda_\chi$.

(ii) $\chi_1(p) \in \mu_{p^\infty}$ , $\chi_1(p) \neq 1$ のとき, $\mathrm{Col}_\chi : \mathcal{U}_\chi \xrightarrow{\sim} (\chi_1(p)-1, \dot{T}) \subset \Lambda_\chi$.

(iii) $\chi_1(p) = 1$ のとき, 次は $\Lambda_\chi$-加群の完全系列をなす:

$$0 \longrightarrow \Lambda_\chi/(\dot{T}) \longrightarrow \mathcal{U}_\chi \longrightarrow \dot{T}\Lambda_\chi \oplus \Lambda_\chi/(d, \dot{T}) \longrightarrow 0.$$

最後の写像は Coleman power series を用いて, ある写像 $\alpha_\chi : \mathcal{U}_\chi \to \Lambda_\chi/(d, \dot{T})$ が定義でき, $u \in \mathcal{U}_\chi$ に対して, $u \mapsto (\mathrm{Col}_\chi(u), \alpha_\chi(u))$ で定められる.

$\mathcal{U}^\chi$ および $\mathcal{U}_\chi$ の構造は上のように決定できたので, 次に 円単数群 $\mathcal{C}$ の $\chi$-part および $\chi$-quotient について考える.

$m'|m$ , $m' \neq 1$ に対して

$$\eta_{m'} = \eta_{m',K} := ((N_{\mathbb{Q}(\zeta_{m'})/\mathbb{Q}(\zeta_{m'})\cap F}(1 - \zeta_{p^{n+1}}\zeta_{m'}^{p^{-n}}))_{n\in\mathbb{N}})^r \in \mathcal{C}_K$$

とおく. ただし $r = |(\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}/p\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}})^\times|$ である.

$\eta \in \mathcal{U}$ に対して, 自然な全射 $\mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_\chi$ による $\eta$ の像を$\eta_\chi$ とかくことにする. $\mathcal{C}$ の $\mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_\chi$ による像を $\widetilde{\mathcal{C}}_\chi$ で表す. すなわち, $\widetilde{\mathcal{C}}_\chi \subseteq \mathcal{U}_\chi$ であり $(\mathcal{U}/\mathcal{C})_\chi \simeq \mathcal{U}_\chi/\widetilde{\mathcal{C}}_\chi$ が成り立つ. $\mathbb{Z}_p[\chi][\Delta]$ の元 $\xi$ を

$$\xi = \xi_{\chi,K} := \sum_{\delta\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{fp})\cap K/\mathbb{Q})} \chi(\delta)\delta^{-1}$$

とおく.

そこで, 次を示した:

**補題 5.2.** ( a ) $\Lambda_\chi$-加群 $\mathcal{C}^\chi$ は $\xi(\eta_f)$ で生成される.

( b ) $\Lambda_\chi$-加群 $\widetilde{\mathcal{C}}_\chi$ は$\{\eta_{m_I,\chi} | I \subseteq \mathfrak{L}\}$ で生成される.

注 *6.* [Gr, Lem. 2.11] において$\widetilde{\mathcal{C}}_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$ は $\Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$-加群として $\eta_{f,\chi}$ で生成されることが示されている.

最後に $\mathrm{Col}^\chi(\xi(\eta_f))$ , $\mathrm{Col}_\chi(\eta_{m_I,\chi})$ および $\alpha_\chi(\eta_{m_I,\chi})$ がわかればよい. logarithmic derivative ([W, §13.7] 参照) を用いることにより, $\mathrm{Col}^\chi(\xi(\eta_f))$, $\mathrm{Col}_\chi(\eta_{m_I,\chi})$ などの $T = \kappa(\gamma_0)^k - 1$, $k \geq 1$ での値をみることができる. その事実と円単数の norm property を次のように計算できた:

$$\mathrm{Col}^\chi(\xi(\eta_f)) = g_\chi(T),$$

$$\mathrm{Col}_\chi(\eta_{m_I,\chi}) = d_I \prod_{l\in I}(1-\chi(l)(1+T)^{a_l})g_\chi(T),$$

$$\begin{aligned}\alpha_\chi(\eta_{m_I,\chi}) &= d_I \prod_{l\in I}(1-\chi_1(l)l)B_{1,\chi_1} \mod d(\Lambda_\chi/(\dot{T}))\\ &= d_I \prod_{l\in I}(1-\chi(l)(1+T)^{a_l})B_{1,\chi_1}|_{T=\kappa(\gamma_0)-1} \mod d(\Lambda_\chi/(\dot{T})).\end{aligned}$$

上の結果と命題 5.1, 補題 5.2 を合わせれば 定理 4.1, 4.2 が得られる.

注 7. [Gr, §2] では $(\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]])_\chi \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$ を canonical に決めている. よって Col : $\mathcal{U} \to \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]]$ を通して canonical な準同型$\Phi_\chi : \mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}_p \to \Lambda_\chi \otimes \mathbb{Q}_p$ を定義していた. そこで $\Phi_\chi(\eta_{f,\chi}) = g_\chi(T)$ を示している. この $\Phi_\chi$ は一般に $\otimes\mathbb{Q}_p$ なしには定義できないものであった. なお $\mathrm{Col}_\chi$ を $\otimes\mathbb{Q}_p$ した加群上の準同型と見なしたとき $\mathrm{Col}_\chi = d_\varnothing \Phi_\chi$ ($d_\varnothing := [\mathbb{Q}(\zeta_{m_\mathfrak{L}}) \cap K : \mathbb{Q}(\zeta_f) \cap K]$) という関係になっている.

## 参考文献


[C] R. Coleman, *Local units modulo circular units,* Proc. Amer. Math. Soci. **89** (1983) 1-7.

[F-W] B. Ferrero and L. Washington, *The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields,* Ann. of Math. **109** (1978) 377-395.

[Gi] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-local et $\mathbb{Z}_l$-extensions,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **29** (1979) 49-79.

[Gr] C. Greither, *Class groups of abelian fields, and the main conjecture,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **43** (1992) 449-499.

[Iw] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields,* J. Math. Soci. Japan, **16** (1964) 42-82.

[Si] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field,* Invent. math. **62** (1980) 181-234.

[So] D. Solomon, *On the classgroups of imaginary abelian fields,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **40** (1990) 467-492.

[T] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units,* in preparation.

[W] L. Washington, *Introduction to the cyclotomic fields,* GTM 83, Springer-Verlag 1982.



Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-ku Tokyo 153-0041, JAPAN
*E-mail address*: ttsuji@ms.u-tokyo.ac.jp